

Propositions de variante de modèle de cohorte fictive utilisé dans l'analyse des statistiques de l'éducation population

¹ Razafindrabe Raymond, ² Rastefano Elisee

¹ Doctorant, Ecole Doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation, Université d'Antananarivo, Madagascar

² Professeur, Ecole Doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation, Université d'Antananarivo, Madagascar

Abstract

La méthode de cohorte fictive est utilisée dans le traitement des statistiques scolaires pour dégager des indicateurs d'analyse de rendement du système éducatif. Elle consiste à établir le parcours d'une cohorte fictive d'élèves sur la base des taux de flux calculés à partir des statistiques scolaires. Les indicateurs sont obtenus par décompte des différentes composantes des années-élèves renfermés dans le diagramme de flux de la cohorte. L'étude met en exergue des cas d'incohérence entre la procédure de calcul des taux de flux d'un côté, et l'élaboration du diagramme de flux à partir de ces taux, de l'autre. L'ajustement proposé part d'un principe d'établissement de taux de redoublement corrigés. Il aboutit à la formulation d'expressions mathématiques des principaux indicateurs de rendement. Il se trouve que le modèle ainsi ajusté est, à la fois, mieux justifié sur le plan théorique et plus maniable sur le plan pratique.

Keywords: système éducatif, cohorte fictive, coefficient d'efficacité, indicateurs de l'éducation

1. Introduction

Les différents domaines disposent chacun d'outils spécifiques pour le traitement des données y afférentes, en plus des divers outils statistiques communs. Dans le domaine de l'éducation, la méthode de cohorte fictive, est utilisée particulièrement pour dégager les principaux indicateurs d'efficacité interne du système. En effet, le système éducatif est considéré, entre autres, comme un système de transformation. Le rendement correspondant, en termes de rapport intrants-extrants, peut être dégagé à partir des différentes techniques d'analyse économique et financière. Quant à l'analyse de l'efficacité, visant à apprécier l'efficacité de l'utilisation des ressources, elle passe généralement par le suivi de groupe d'élèves, consommant ensemble les ressources engagées.

Le présent article s'intéresse à la méthode de cohorte fictive, il se propose d'apporter des éléments d'ajustement dans le but d'en améliorer les performances tout en facilitant l'utilisation. L'étude concerne principalement le côté technique, voire mathématique de cet outil de calcul. Le volet Méthodologie de l'article est consacré à une présentation de l'outil dans sa forme habituelle, puis de la ligne d'ajustement proposée. Les effets de la proposition sur l'utilisation de ladite méthode seront avancés et appréciés dans le volet Résultats.

2. Methodologie

La méthode de cohorte fictive consiste à dresser une cohorte hypothétique d'élèves à partir des statistiques globales des effectifs scolaires pour dégager des indicateurs se rapportant au parcours scolaire des élèves. Comme tout modèle basé sur des hypothèses, la méthode est susceptible d'être repensée pour aboutir éventuellement à l'élaboration d'autres versions.

2.1 Démarches de la Méthode de Cohorte Fictive

La cohorte considérée dans le modèle se rapporte à la promotion des élèves à l'entrée d'un niveau d'étude. Le bloc

se disloque au cours des années en fonction de la réussite scolaire de chacun de ses membres. Le phénomène peut être représenté dans un diagramme de flux qui donne à son tour les éléments nécessaires au calcul de différents indicateurs

2.1.1 Elaboration du Diagramme de Flux ^[1, 2]

En chaque fin d'année scolaire, trois éventualités se présentent à l'élève: la promotion à la classe supérieure, le redoublement de classe et l'abandon du système éducatif. Les taux de flux sont élaborés pour traduire les passages des élèves dans ces différents trajets. Leurs expressions se présentent comme suit:

(i) Taux de Promotion de l'année d'études i:

$$p_i = \frac{\text{Effectif des élèves promus à l'année d'études suivante}}{\text{Effectif initial des élèves}} \quad (E1)$$

(ii) Taux de Redoublement:

$$r_i = \frac{\text{Effectif des élèves redoublant l'année d'études}}{\text{Effectif initial des élèves}} \quad (E2)$$

(ii) Taux d'Abandon:

$$a_i = \frac{\text{Effectif des élèves ayant abandonné}}{\text{Effectif initial des élèves}} \quad (E3)$$

Pour la dernière année d'études, la promotion correspond à l'obtention du diplôme. Les valeurs obtenues sont généralement exprimés en pourcentage. Il est à remarquer que la somme des trois taux est égale à 100.

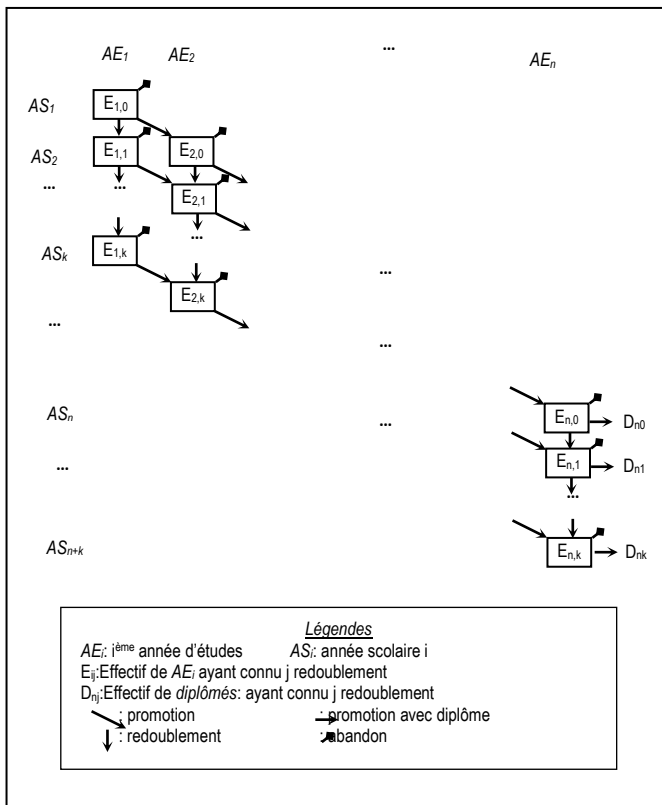
Les taux de flux se rapportent à une année scolaire donnée. Dans la pratique, ils sont établis à partir des statistiques des élèves de l'année scolaire considérée qui renferme l'effectif initial constituant chacun des dénominateurs dans les expressions, et des statistiques de l'année scolaire suivante qui permettent de déduire les effectifs respectifs des promus, des

redoublants et de ceux qui ont quitté le système, lesquels forment les numérateurs dans les expressions des taux de flux. La cohorte fictive, objet du modèle, est établie à partir des taux de flux correspondant à une seule année scolaire. Il est supposé que les élèves de la cohorte suivent un parcours correspondant à ces taux de flux durant leur passage dans le cycle d'études. Ainsi, les hypothèses ci-après régissent le modèle:

- **H1:** Il n'y a pas de nouvel entrant s'ajoutant aux élèves de la cohorte,
- **H2:** les taux de flux par année d'études restent constants tout au long du parcours scolaire des élèves
- **H3:** le taux de flux restent identiques indépendamment du nombre de redoublement subi par les élèves ; et
- **H4:** le nombre de redoublement autorisé est plafonné, les élèves atteignant le seuil sont reversés dans l'effectif des abandons.

L'évolution de la cohorte est visualisée sous forme de diagramme. Les flux d'élèves sont présentés sous forme de graphes orientés utilisant l'année scolaire et l'année d'études comme repères. Leurs valeurs sont déterminées à partir des formules des taux exprimés ci-dessus.

Le graphe commence par la représentation de l'effectif initial des élèves admis à la première année d'études du cycle à l'année scolaire posée comme origine du temps. Le groupe va se disperser progressivement au fil des années. Pour de raison pratique de calcul, l'effectif initial est généralement fixé à 1000. La Figure 1 présente le diagramme de flux correspondant à la cohorte fictive. Le cycle considéré dans le graphe comporte n années d'études ; le nombre maximum de redoublement autorisé est représenté par k . Les dernières élèves de la cohorte quittent ainsi le cycle après $n+k$ années scolaires.



Source: établi à partir des indications données dans les Références [1] et [2]

Fig. 1: Diagramme de Flux de Cohorte Fictive

2.1.2 Calcul des Indicateurs [3]

Le principal indicateur dégagé à partir du modèle est le coefficient d'efficacité qui mesure l'efficacité du système. Les résultats sont constitués par les diplômés. Les ressources sont synthétisées en termes d'années-élèves: une année-élève est censée représenter les ressources mobilisées pour la scolarisation d'un élève pendant une année-scolaire. Le coefficient d'efficacité met en rapport le volume idéal de ressources nécessaires à la production des diplômés avec les ressources réellement consommées.

Les effectifs $E_{i,j}$ présentés dans les cases du diagramme représentent le nombre d'années-élèves consommées par les différentes classes. Dans le cas idéal où les diplômés ont tous effectué leur parcours scolaire sans aucun redoublement, le volume de ressources consommées est donné par le nombre de diplômés multiplié par le nombre d'années d'études. Le coefficient d'efficacité est alors:

$$CE = \frac{n \sum_{j=0}^k D_{n,j}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^k E_{i,j}} \quad (E4)$$

L'inverse de cette expression, au coefficient n près, donne la consommation en années-élèves par diplômé:

$$AED = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^k E_{i,j}}{\sum_{j=0}^k D_{n,j}} \quad (E5)$$

Par ailleurs, les déperditions peuvent être décomposées en redoublements et en abandons. Les valeurs absolues respectives de ces deux composantes de déperdition sont:

$$D_R = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^k R_{i,j}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^k E_{i,j} - n \sum_{j=0}^k D_{n,j}} \quad (E6)$$

$$D_A = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k A_{i,j}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^k E_{i,j} - n \sum_{j=0}^k D_{n,j}} \quad (E7)$$

Ces valeurs peuvent être ramenées en pourcentage de l'ensemble des deux grandeurs.

D'autres indicateurs qui ne se rapportent pas directement à l'efficacité sont également dégagés du diagramme. Tels sont les taux de survie à chaque année d'études:

$$\tau_i = E_{i,j} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k A_{i,j} \quad (E8)$$

Enfin, la durée moyenne des études de diplômés est donnée par:

$$d = \frac{\sum_{j=1}^k (n+k) D_{n,j}}{\sum_{j=0}^k D_{n,j}} \quad (E9)$$

Pratiquement, le diagramme des flux et les calculs des indicateurs qui s'ensuivent sont effectués dans une feuille tableur.

2.2 Proposition d'Amélioration du Modèle

D'autres méthodes sont disponibles, ou peuvent être imaginées pour la confection d'indicateur de mesure d'efficacité. La présente variante reste entièrement dans le champ du modèle de cohorte fictive en proposant des ajustements rendant le modèle plus cohérent.

2.2.1 Cas d'Incohérence au niveau des Taux de Flux Utilisés

La méthode se propose d'établir une cohorte à partir des données statistiques. Mais dans la pratique, les taux de flux de la cohorte supposée reconstituée ne reproduisent pas effectivement ceux des statistiques scolaires à partir desquelles ces taux sont extraits. En examinant le cas de l'année d'études i figurée dans le diagramme des flux:

- le taux de promotion utilisé pour le diagramme est p_i quelle que soit le groupe d'élèves;
- le taux de redoublement est r_i pour $E_{i,0}$ à $E_{i,k-1}$ mais 0 pour $E_{i,k}$;
- le taux d'abandon est a_i pour $E_{i,1}$ à $E_{i,k-1}$ mais $a_i + r_i$ pour $E_{i,k}$.

Ainsi, le taux de redoublement moyen de la cohorte fictive n'est pas du tout égal à r_i mais à:

$$r'_i = \frac{\sum_{j=0}^{k-1} E_{i,j}}{\sum_{j=0}^k E_{i,j}} r_i \tag{E10}$$

De même, au lieu de a_i , la cohorte présente un taux d'abandon moyen de:

$$a'_i = a_i + \frac{E_{i,k}}{\sum_{j=0}^k E_{i,j}} r_i \tag{E11}$$

2.2.2 Ajustements Proposés

Pour corriger la distorsion, tout en maintenant la structure du diagramme de flux, il convient d'utiliser, pour chacune des années d'études de la cohorte fictive, des taux de flux qui donnent comme valeurs moyennes les taux relevés dans les statistiques scolaires. Les ajustements à faire concernent les taux de redoublement et taux d'abandon conformément aux expressions (E10) et (E11) ci-dessus.

En désignant par ρ_i , la valeur ajustée du taux de redoublement, il faut que:

$$\frac{\sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_{i,j}}{\sum_{j=0}^k \varepsilon_{i,j}} \rho_i = r_i \tag{E12}$$

Quant au taux d'abandon, sa valeur ajustée, désignée ci-après par α_i vérifie:

$$\alpha_i + \frac{E_{i,k}}{\sum_{j=0}^k \varepsilon_{i,j}} r_i = a_i \tag{E13}$$

Dans ces expressions $\varepsilon_{i,j}$ sont les valeurs des $E_{i,j}$ correspondant aux taux ajustés.

Ainsi, il s'agit d'un système de $2n$ équations, n étant le nombre d'années d'études, comprenant apparemment, avec les $\varepsilon_{i,j}$, plus d'inconnus que les $2n$ constitués par les ρ_i et α_i . Toutefois, la détermination de ces taux ajustés n'est pas une fin en soi. Il s'agit plutôt d'un moyen pour améliorer la méthode de cohorte fictive, qui est elle-même un outil pour le calcul d'indicateur d'efficacité.

2. Resultats

Les résultats étudiés dans cette partie analysent les conséquences de l'ajustement des taux de flux, sans passer par la résolution du système d'équations présenté plus haut qui se trouve d'ailleurs pratiquement impossible à résoudre dans la mesure où il y a plus d'inconnus que d'équations.

2.1 Résultat Principal: consommation en années-élèves indépendante de l'hypothèse sur le nombre de redoublement autorisé

L'expression (E12) reliant la valeur du taux de redoublement ajusté pour la cohorte au taux de redoublement observé à partir des statistiques contient des éléments portant sur le nombre d'années-élèves, plus précisément sur des sommes de ces grandeurs. Les consommations en années-élèves peuvent être dégagées à partir de telle expression.

Pour la première année d'études:

$$r_1 = \frac{\sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_{1,j}}{\sum_{j=0}^k \varepsilon_{1,j}} \rho_1 = \frac{\sum_{j=1}^k \varepsilon_{1,j}}{\sum_{j=0}^k \varepsilon_{1,j}} = 1 - \frac{\varepsilon_{1,0}}{\sum_{j=0}^k \varepsilon_{1,j}}$$

On en déduit la consommation correspondant à la première année d'études:

$$\sum_{j=0}^k \varepsilon_{1,j} = \frac{1}{1-r_1} \varepsilon_{1,0}$$

Dans la suite du raisonnement l'expression $\frac{1}{1-r_1}$ sera formulée $\frac{p_0}{1-r_1}$, avec $p_0=1$ pour de raisons de commodité d'écriture.

Pour la deuxième d'études, en utilisant les taux corrigé ρ_1 et ρ_2 , les différentes composantes du nombre d'années-élèves s'expriment respectivement:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2,0} &= p_1 \varepsilon_{1,0} \\ \varepsilon_{2,1} &= p_1 \varepsilon_{1,1} + \rho_2 \varepsilon_{2,0} \\ &\dots \\ \varepsilon_{2,k} &= p_1 \varepsilon_{1,k} + \rho_2 \varepsilon_{2,k-1} \end{aligned}$$

D'où:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k \varepsilon_{2,j} &= p_1 \sum_{j=0}^k \varepsilon_{1,j} + \rho_2 \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_{2,j} \\ &= p_1 \sum_{j=0}^k \varepsilon_{1,j} + \frac{\rho_2 \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_{2,j}}{\sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_{2,j}} \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_{2,j} \\ &= p_1 \sum_{j=0}^k \varepsilon_{1,j} + \rho_2 \sum_{j=0}^k \varepsilon_{2,j} \end{aligned}$$

On en tire l'expression de la somme des années-élèves correspondant à la deuxième année d'études:

$$\sum_{j=0}^k \varepsilon_{2,j} = \frac{p_1 \sum_{j=0}^k \varepsilon_{1,j}}{1 - \rho_2} = \frac{p_0 p_1}{(1 - r_1)(1 - r_2)} \varepsilon_{1,0}$$

Le raisonnement peut être continué par récurrence en supposant que pour l'année d'études $i > 1$ la somme des années-élèves est:

$$\sum_{j=0}^k \varepsilon_{i,j} = \frac{\prod_{j=0}^{i-1} p_j}{\prod_{j=1}^i (1 - r_j)} \varepsilon_{1,0}$$

Pour l'année d'études $i+1$:

$$\rho_{i+1} = \frac{r_{i+1} \sum_{j=0}^k \varepsilon_{i+1,j}}{\sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_{i+1,j}}$$

Les effectifs de l'année d'études $i+1$ peuvent être décomposés en deux groupes qui sont:

(i) les promus de l'année d'études i s'élevant à:

$$p_i \sum_{j=0}^k \varepsilon_{i,j} = p_i \frac{\prod_{j=0}^{i-1} p_j}{\prod_{j=1}^i (1-r_j)} \varepsilon_{1,0} = \frac{\prod_{j=0}^i p_j}{\prod_{j=1}^i (1-r_j)} \varepsilon_{1,0}$$

(ii) les redoublants de l'année d'études $i+1$ formulés par:

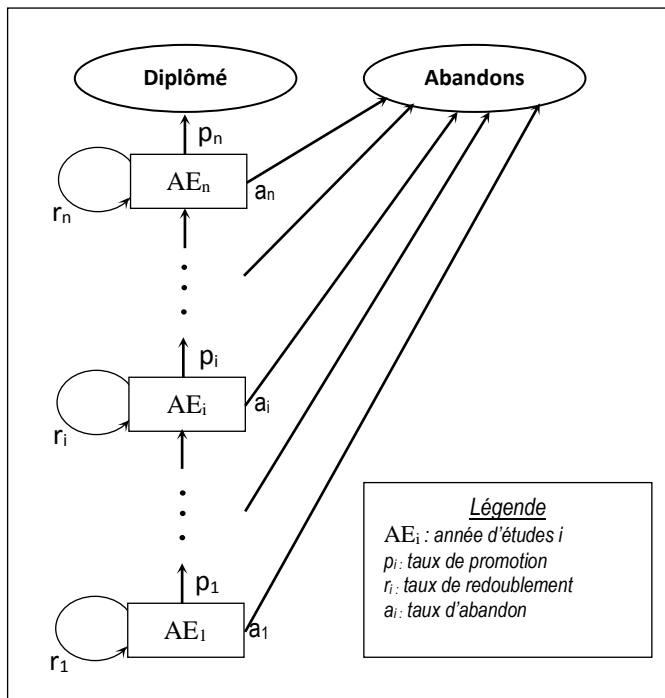
$$r_{i+1} \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_{i+1,j} = r_{i+1} \sum_{j=0}^k \varepsilon_{i+1,j}$$

Donc:

$$\sum_{j=0}^k \varepsilon_{i+1,j} = \frac{\prod_{j=1}^i p_j}{\prod_{j=1}^i (1-r_j)} \varepsilon_{1,0} + r_{i+1} \sum_{j=0}^k \varepsilon_{i+1,j}$$

$$\sum_{j=0}^k \varepsilon_{i+1,j} = \frac{\prod_{j=1}^i p_j}{\prod_{j=1}^{i+1} (1-r_j)} \varepsilon_{1,0}$$

En considérant, par ailleurs, en particulier un nombre théoriquement infini de redoublement, le parcours scolaire peut être modélisé comme un processus markovien illustré par la Figure 2.



Source: établi à partir de diagramme relevé dans la Référence [41]

Fig. 2: Diagramme de Transition du Parcours Scolaire

Il s'agit plus précisément d'une chaîne de Markov absorbante, ayant deux états absorbants: l'état « diplômé » et l'état « abandon ». En effet, arrivé à l'un de ces deux états, l'élève ne pourrait plus quitter pour d'autre état. La matrice de correspondant à ce diagramme peut être mise sous la forme canonique suivante:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ a_n & p_n & r_n & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & \dots & p_2 & r_2 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & p_1 & r_1 \end{pmatrix} \quad (E14)$$

La matrice fondamentale de la chaîne est:

$$F = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1-r_n)} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{p_2 \dots p_{n-1}}{(1-r_2) \dots (1-r_n)} & \dots & \frac{1}{(1-r_2)} & 0 \\ \frac{p_1 \dots p_{n-1}}{(1-r_1) \dots (1-r_n)} & \dots & \frac{p_1}{(1-r_1)(1-r_2)} & \frac{1}{1-r_1} \end{pmatrix} \quad (E15)$$

La dernière ligne porte le nombre de passage dans les années d'études successives. Il s'agit, en termes d'analyse du système éducatif, du nombre d'années élèves consommées par un individu correspondant à chaque année d'études. On y retrouve également les expressions précédentes.

En définitive,

L'expression du nombre d'années-élèves consommées (NbAnEl) par la cohorte fictive ne dépend pas du nombre de redoublement autorisé mais uniquement des valeurs des taux de flux relevés :

$$NbAnEl = E_{1,0} \sum_{j=1}^n \frac{\prod_{i=0}^{j-1} p_i}{\prod_{i=1}^j (1-r_i)} \quad (E16)$$

avec $p_0 = 1$ et $E_{1,0}$ l'effectif initiale de la cohorte

2.2 Conséquences: possibilités de formulations des indicateurs d'efficacité interne à partir des taux de flux

Les différents indicateurs se rapportant au taux de flux étant exprimés à partir de nombre d'années-élèves, ils peuvent être alors, à leur tour, formulés directement en fonction des taux de flux ; ne nécessitant pas alors l'élaboration du diagramme des flux pour les calculs. Dans les expressions ci-après le terme p_0 égale à 1 est introduit pour simplifier la formulation.

2.2.1 Coefficient d'Efficacité

Les numérateur et dénominateur de l'expression E5 (cf. sous-section 1.1.3) du coefficient d'efficacité se traduit directement comme suit:

$$e = \frac{n \prod_{i=1}^n \frac{p_i}{(1-r_i)}}{\sum_{j=1}^n \frac{\prod_{i=0}^{j-1} p_i}{\prod_{i=1}^j (1-r_i)}} \times 100 \quad (E17)$$

2.2.2 Années Ressources Consommées par Diplômé

L'expression de la consommation en années élèves est déduit immédiatement de la formule ci-dessus:

$$e = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{\prod_{i=0}^{j-1} p_i}{\prod_{i=1}^j (1-r_i)}}{\prod_{i=1}^n \frac{p_i}{(1-r_i)}} \quad (E18)$$

2.2.3 Répartition de la Déperdition

Les redoublements et abandons correspondant à l'effectif $E_{i,j}$ sont obtenus en affectant respectivement le taux de redoublement et le taux d'abandon à l'effectif correspondant. Les déperditions en termes d'années élèves pour les deux composantes peuvent être formulées comme suit entre autres:

$$D_R = \sum_{i=1}^n r_i \sum_{j=0}^k E_{i,j} = \sum_{i=1}^n r_i \frac{\prod_{j=0}^{i-1} p_j}{\prod_{j=1}^i (1-r_j)} E_{1,0} \quad (E19)$$

$$\begin{aligned}
 D_A &= \sum_{i=1}^n i \alpha_i \sum_{j=0}^k E_{i,j} \\
 &= \sum_{i=1}^n i(1 - p_i - r_i) \sum_{j=1}^n \frac{\prod_{j=0}^{i-1} p_j}{\prod_{j=1}^i (1 - r_j)} E_{1,0} \quad (E20)
 \end{aligned}$$

D'autres expressions peuvent être élaborées en partant de la répartition de la consommation entre sortants diplômés, redoublants et élèves abandonnant le système.

2.2.4 Taux de Survie

L'effectif de la cohorte atteignant l'année d'étude i est obtenu directement en divisant l'effectif à cette année d'étude par l'effectif initiale:

$$\begin{aligned}
 \tau_i &= p_{i-1} \sum_{j=0}^k E_{i-1,j} = p_{i-1} \frac{\prod_{j=0}^{i-2} p_j}{\prod_{j=1}^{i-1} (1 - r_j)} E_{1,0} \\
 \tau_i &= \frac{\prod_{j=0}^{i-1} p_j}{\prod_{j=1}^i (1 - r_j)} E_{1,0} \quad (E21)
 \end{aligned}$$

2.2.5 Durée Moyenne d'Etudes des Diplômés

La durée moyenne d'études est fonction du nombre de redoublement fixé. Ainsi, cet indicateur ne peut pas être formulé directement ; mais elle peut être déterminée pour le modèle ajusté en utilisant les taux ajustés dans le diagramme des flux.

2.3 Impacts sur la manipulation du modèle

Dans le cadre du modèle avec taux ajustés, les différents indicateurs sont obtenus directement sans passer par les diagrammes des flux. Le calcul des taux ajustés n'est même pas indispensable puisque les formules des indicateurs n'utilisent finalement que les taux déterminés à partir des statistiques scolaires.

Dans la pratique, le modèle ajusté peut être traité aisément avec une simple machine à calculer. Dans le cas où les données et indicateurs sont traités à partir d'un logiciel tableur, la variante ajustée occupe les mêmes nombres de cellules pour les données statistiques de base; mais en matière de traitement nécessaire pour dégager les indicateurs, elle requiert dix fois moins de cellules.

3. Conclusion

Certains indicateurs nécessaires à l'analyse d'un système sont difficilement obtenus par mesure directe. Leur élaboration requiert ainsi l'utilisation de modèle. La méthode de cohorte fictive permet de déterminer différents indicateurs utilisés notamment pour apprécier l'efficacité du système éducatif. D'autres méthodes sont conçues également pour telle mesure dans le but de simplifier les procédures de calcul. La version présentée dans cet article se veut être simple dans l'application tout en reprenant, voire améliorant, le principe d'un modèle relativement complexe qu'est la méthode de cohorte fictive.

4. References

1. Hallak Jacques. La Productivité, le Rendement et l'Analyse des Systèmes. Paris:Institut International de la Planification de l'Education.
2. Carrizo Luis. Analyse Quantitative des Systèmes d'Education et Projections des Effectifs Scolaires.

Antananarivo: Ministère de l'Enseignement Secondaire et de l'Education de Base, 1988.

3. Institut de Statistique de l'UNESCO. Indicateurs de l'Education, Directives Techniques, 2009.
4. Kemeny John G, Laurie Snell J. Finite Markov Chains, Generalization of a Fundamental Matrix. New York: Springer-Verlag, 1975.